CURS
Integrala triplă

1 Definiţie. Proprietăţi

Fie $V \subset \mathbb{R}^3$ un domeniu compact (închis şi mărginit). Analog cu cazul domeniilor plane, vom presupune că $V_1, V_2, ..., V_n$ este un şir finit de domenii compacte, fără puncte interioare comune, astfel încât

$$V = V_1 \cup V_2 \cup ... \cup V_n. \tag{1}$$

Vom spune că relaţia (1) defineşte o *descompunere a domeniului* V şi notăm cu $\Delta := \{V_i\}_{i=\overline{1,n}}$ clasa tuturor mulţimilor ce formează această descompunere.

Din nou ca în cazul prezentat în cursul anterior, cel mai mare dintre diametrele mulţimilor $V_1, ..., V_n$ se notează cu $\|\Delta\|$ şi se numeşte *diametrul descompunerii* Δ. În fiecare subdomeniu V_i considerăm câte un punct $(\xi_i, \eta_i, \delta_i) \in V_i$.

Fiind dată o funcţie $f : V \to \mathbb{R}$, formăm suma

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i, \delta_i) \cdot \mathrm{Vol}(V_i). \tag{2}$$

Această sumă se va numi *suma Riemann asociată funcţiei* f*, domeniului* V*, descompunerii* Δ *şi sistemului de puncte intermediare* $\{(\xi_i, \eta_i, \delta_i)\}_{i=\overline{1,n}}$, şi o notăm cu

$$\sigma_\Delta(f; \xi_i, \eta_i, \delta_i).$$

Definiţia 1.1 *Fie* $V \subset \mathbb{R}^3$ *un domeniu compact şi* $f : V \to \mathbb{R}$*. Funcţia* f *se numeşte* integrabilă Riemann pe domeniul V *dacă există* $I \in \mathbb{R}$ *astfel încât, pentru orice* $\varepsilon > 0$*, există* $\delta > 0$ *astfel încât, pentru orice descompunere* Δ *cu* $\|\Delta\| < \delta$ *şi orice ar fi punctele* $(\xi_i, \eta_i, \delta_i) \in V_i$ $\left(i = \overline{1,n}\right)$ *este satisfăcută relaţia:*

$$|\sigma_\Delta(f; \xi_i, \eta_i, \delta_i) - I| < \varepsilon.$$

În această situaţie, numărul I *se numeşte* ***integrala triplă în sens Riemann*** *a funcţiei* f *pe domeniul* V *şi se notează prin*

$$I = \iiint\limits_V f(x, y, z)dxdydz.$$

Se observă că dacă $f(x, y, z) = 1,\ \forall(x, y, z) \in V$, atunci f este integrabilă Riemann pe V şi

$$\mathrm{Vol}(V) = \iiint\limits_V dxdydz. \tag{3}$$

Teorema 1.2 *Fie* $V \subset \mathbb{R}^3$ *un domeniu compact şi* $f : V \to \mathbb{R}$ *continuă pe* V*. Atunci* f *este integrabilă pe domeniul* V*.*

1.1 Calculul integralei triple

În această secţiune prezentăm câteva cazuri în care integrala triplă se poate calcula.

(a) Să considerăm cazul în care V este un **paralelipiped** cu laturile paralele cu axele de coordonate, adică:

$$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x \in [\,a, b\,],\ y \in [\,c, d\,],\ z \in [\,e, g\,]\} \tag{4}$$

Teorema 1.3 *Fie $f : V \to \mathbb{R}$ continuă pe domeniul V. Atunci, funcţia*

$$F\,(x, y) = \int_e^g f\,(x, y, z)\,dz, \quad \forall (x, y) \in [\,a, b\,] \times [\,c, d\,] \tag{5}$$

este integrabilă pe $D = [\,a, b\,] \times [\,c, d\,]$. În plus,

$$\iiint_V f(x, y, z)\,dxdydz = \iint_D \left[\int_e^g f\,(x, y, z)\,dz\right] dxdy. \tag{6}$$

Demonstraţie. Să considerăm o descompunere a domeniului V, efectuată cu ajutorul unor plane paralele de forma $x = x_i$, $i = \overline{0, m}$, $y = y_j$, $j = \overline{0, n}$, $z = z_k$, $k = \overline{0, p}$, unde:

$$a = x_0 < x_1 < ... < x_{m-1} < x_m = b,\ c = y_0 < y_1 < ... < y_{n-1} < y_n = d,$$

$$e = z_0 < z_1 < ... < z_{p-1} < z_p = g.$$

Notăm

$$V_{ijk} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x \in [\,x_{i-1}, x_i\,],\ y \in [\,y_{j-1}, y_j\,],\ z \in [\,z_{k-1}, z_k\,]\},$$
$$m_{ijk} = \inf_{V_{ijk}} f(x, y, z), \quad M_{ijk} = \sup_{V_{ijk}} f(x, y, z),$$

pentru orice $i = \overline{1, m}$, $j = \overline{1, n}$, $k = \overline{1, p}$.

În baza proprietăţii de monotonie a integralei, avem

$$m_{ijk}(z_k - z_{k-1}) \leq \int\limits_{z_{k-1}}^{z_k} f(x, y, z)\,dz \leq M_{ijk}(z_k - z_{k-1}),$$

pentru orice $(x, y, z) \in V_{ijk}$.

Folosind o teoremă de medie pentru integrala Riemann, rezultă că există $\xi \in [e, g]$ astfel încât

$$F\,(x, y) = \int_e^g f\,(x, y, z)\,dz = \frac{1}{g - e} f(x, y, \xi),\ \forall (x, y) \in D.$$

Rezultă că F este continuă pe $D = [\,a, b\,] \times [\,c, d\,]$, deci este integrabilă pe D. În plus, pe orice dreptunghi $D_{ij} = [\,x_{i-1}, x_i\,] \times [\,y_{j-1}, y_j\,]$, cu $i = \overline{1, m}$, $j = \overline{1, n}$, avem

$$\sum_{k=1}^{p} m_{ijk}(z_k - z_{k-1})(x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1}) \leq \iint_{D_{ij}} \left[\int_e^g f\,(x, y, z)\,dz\right] dxdy \leq$$

$$\leq \sum_{k=1}^{p} M_{ijk}(z_k - z_{k-1})(x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1}).$$

Din aceste relaţii, prin sumare după $i = \overline{1,m}$ şi $j = \overline{1,n}$, obţinem inegalităţile

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{p} m_{ijk}\cdot \mathrm{Vol}(V_{ijk}) \le \iint\limits_{D} \left[\int_e^g f(x,y,z)\,dz\right] dxdy \le \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{p} M_{ijk}\cdot \mathrm{Vol}(V_{ijk})$$

Dar, cum f este continuă pe domeniul compact V_{ijk}, valorile m_{ijk} şi M_{ijk} se ating, în baza Teoremei lui Weierstrass, în puncte din domeniul V_{ijk}, adică sumele din dreapta şi stânga relaţiei precedente sunt sume Riemann. Mai mult, norma descompunerii obţinute va tinde către 0 când $n \to \infty$, $m \to \infty$, $p \to \infty$, iar cum f este integrabilă pe V, va rezulta că ambele sume tind către $\iiint\limits_V f(x,y,z)\,dxdydz$. Astfel, obţinem relaţia (6). $\square$

Observaţia 1.4 *Se poate scrie şi sub forma*

$$\iint\limits_{D} \left[\int_e^g f(x,y,z)\,dz\right] dxdy = \iint\limits_{D} dxdy \int_e^g f(x,y,z)\,dz. \tag{7}$$

Dacă ţinem cont că domeniul D este un dreptunghi, avem găsim formula

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)\,dxdydz = \int_a^b \left\{\int_c^d \left[\int_e^g f(x,y,z)\,dz\right] dy\right\} dx = \int_c^d \left\{\int_a^b \left[\int_e^g f(x,y,z)\,dz\right] dx\right\} dy, \tag{8}$$

ordinea de integrare fiind din interior spre exterior.

Întrucât funcţia f este continuă pe V, se poate schimba ordinea de integrare în relaţia (8) şi astfel obţinem formule analoage:

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)\,dxdydz = \iint\limits_{[a,b]\times[e,g]} \left[\int_c^d f(x,y,z)\;dy\right] dxdz = \int_a^b \left\{\int_e^g \left[\int_c^d f(x,y,z)\,dy\right] dz\right\} dx$$

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)\,dxdydz = \iint\limits_{[c,d]\times[e,g]} \left[\int_a^b f(x,y,z)\;dx\right] dydz = \int_c^d \left\{\int_e^g \left[\int_a^b f(x,y,z)\,dx\right] dz\right\} dy.$$

Exemplul 1.5 *Să se calculeze integrala* $I = \iiint\limits_V xy\,dxdydz$, *unde* $V = [1,2]\times[-2,1]\times\left[0,\frac{1}{2}\right]$.

Soluţie. Întrucât domeniul V este un paralelipiped cu muchiile paralele cu axele de coordonate, avem:

$$I = \int_1^2 dx \int_{-2}^1 dy \int_0^{\frac{1}{2}} xy\;dz.$$

Să calculăm integrala

$$J(x,y) = \int_0^{\frac{1}{2}} xy\,dz = xyz\Big|_0^{\frac{1}{2}} = \frac{xy}{2}.$$

Astfel,

$$I = \int_1^2 dx \int_{-2}^1 \frac{xy}{2}\,dy.$$

Atunci

$$I(x) = \int_{-2}^{1} \frac{xy}{2}\, dy = \left.\frac{xy^2}{4}\right|_{-2}^{1} = -\frac{3x}{4},$$

de unde

$$I = \int_{1}^{2} \left(-\frac{3x}{4}\right) dx = -\left.\frac{3x^2}{8}\right|_{1}^{2} = -\frac{9}{8}. \qquad \square$$

(b) Să considerăm cazul în care V este un **cilindru**, adică:

$$V = D \times [\,e, g\,] = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x, y) \in D,\ z \in [\,e, g\,]\}, \tag{9}$$

unde D este un domeniu compact din planul xOy.

Corpul V poate fi inclus în paralelipipedul V', care are muchiile paralele cu axele de coordonate, astfel încât proiecţia lui V' pe planul xOy este un dreptunghi de forma

$$D' = \{(x, y) \mid x \in [\,a, b\,],\ y \in [\,c, d\,]\},$$

unde $a < b$, $c < d$.

În acest caz vom reduce calculul integralei triple

$$\iiint_V f(x, y, z)\, dxdydz$$

la situaţia precedentă.

Definim funcţia $\bar{f} : V' \to \mathbb{R}$ prin

$$\bar{f}(x, y, z) = \begin{cases} f(x, y, z), & (x, y, z) \in V \\ 0, & (x, y, z) \in V' \setminus V. \end{cases}$$

Întrucât funcţia $f(x, y, z)$ este integrabilă pe V, rezultă folosind definiţia că şi funcţia $\bar{f}(x, y, z)$ este integrabilă pe V'. Mai mult, are loc relaţia:

$$\iiint_V f(x, y, z)\, dxdydz = \iiint_{V'} \bar{f}(x, y, z)\, dxdydz.$$

În baza teoremei precedente, avem

$$\iiint_{V'} \bar{f}(x, y, z)\, dxdydz = \iint_{D'} \left[\int_e^g \bar{f}\,(x, y, z)\, dz\right] dxdy,$$

unde domeniul D' este proiecţia lui V' pe planul xOy.

Din definiţia funcţiei $\bar{f}$, pentru punctele care satisfac $(x, y) \in D$ avem

$$\int_e^g \bar{f}(x, y, z)\, dz = \int_e^g f(x, y, z)\, dz,$$

iar pentru punctele cu $(x, y) \in D' \setminus D$ avem $\displaystyle\int_e^g \bar{f}(x, y, z)\, dz = 0.$

În consecinţă,

$$\iiint\limits_{V'} \bar{f}(x,y,z)\,dxdydz = \iint\limits_{D} \left[\int_e^g f\,(x,y,z)\,dz\right] dxdy.$$

Aşadar, şi în acest caz, pentru calculul integralei triple pe V regăsim formula (6)

$$\iiint\limits_{V} f(x,y,z)\,dxdydz = \iint\limits_{D} \left[\int_e^g f\,(x,y,z)\,dz\right] dxdy.$$

(c) Vom considera în continuare cazul în care V este un domeniu simplu în raport cu una din axele de coordonate.

Definiţia 1.6 *Fie $V \subset \mathbb{R}^3$ un domeniu compact.*

*1. Domeniul V se numeşte **simplu în raport cu axa** Oz dacă există un domeniu compact $D \subset \mathbb{R}^2$ şi două funcţii continue $\varphi, \psi : D \to \mathbb{R}$ cu proprietatea $\varphi(x,y) < \psi(x,y), \forall\,(x,y) \in D$, astfel încât*

$$V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid \varphi(x,y) \leq z \leq \psi(x,y),\ (x,y) \in D\}. \tag{10}$$

*2. Domeniul V se numeşte **simplu în raport cu axa** Oy dacă există un domeniu compact $D' \subset \mathbb{R}^2$ şi două funcţii continue $\alpha, \beta : D' \to \mathbb{R}$ cu proprietatea $\alpha(x,z) < \beta(x,z), \forall\,(x,z) \in D'$, astfel încât*

$$V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid \alpha(x,z) \leq y \leq \beta(x,z),\ (x,z) \in D'\}. \tag{11}$$

*3. Domeniul V se numeşte **simplu în raport cu axa** Ox dacă există un domeniu compact $D'' \subset \mathbb{R}^2$ şi două funcţii continue $\gamma, \delta : D'' \to \mathbb{R}$ cu proprietatea $\gamma(y,z) < \psi(y,z), \forall\,(y,z) \in D''$, astfel încât*

$$V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid \gamma(y,z) \leq x \leq \delta(y,z),\ (y,z) \in D''\}. \tag{12}$$

Observaţia 1.7 *Din definiţia de mai sus deducem că un domeniu $V \subset \mathbb{R}^3$ este simplu în raport cu axa Oz dacă orice paralelă dusă prin puncte interioare lui D intersectează* Fr V *în exact două puncte situate pe suprafeţele $z = varphi(x,y)$ şi respectiv $z = \psi(x,y)$. Analog pentru cazul domeniilor simple în raport cu Oy, respectiv Ox.*

Teorema 1.8 *Fie $f : V \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ continuă pe domeniul compact, V, simplu în raport cu axa Oz. Atunci funcţia*

$$F(x,y) = \int\limits_{\varphi(x,y)}^{\psi(x,y)} f(x,y,z)dz, \quad \forall\,(x,y) \in D \tag{13}$$

este integrabilă pe D şi, în plus:

$$\iiint\limits_{V} f(x,y,z)\,dxdydz = \iint\limits_{D} \left[\int_{\varphi(x,y)}^{\psi(x,y)} f\,(x,y,z)\,dz\right] dxdy. \tag{14}$$

Observaţia 1.9 *Se mai scrie şi sub forma*

$$\iiint\limits_{V} f(x,y,z)\,dxdydz = \iint\limits_{D} dxdy \int_{\varphi(x,y)}^{\psi(x,y)} f\,(x,y,z)\,dz, \tag{15}$$

integrarea realizându-se de la dreapta la stânga.

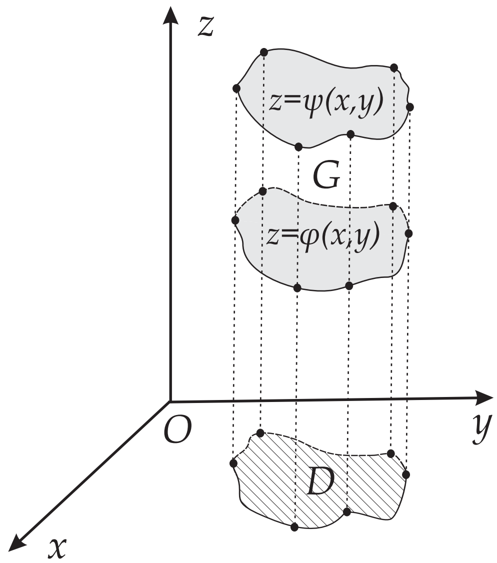
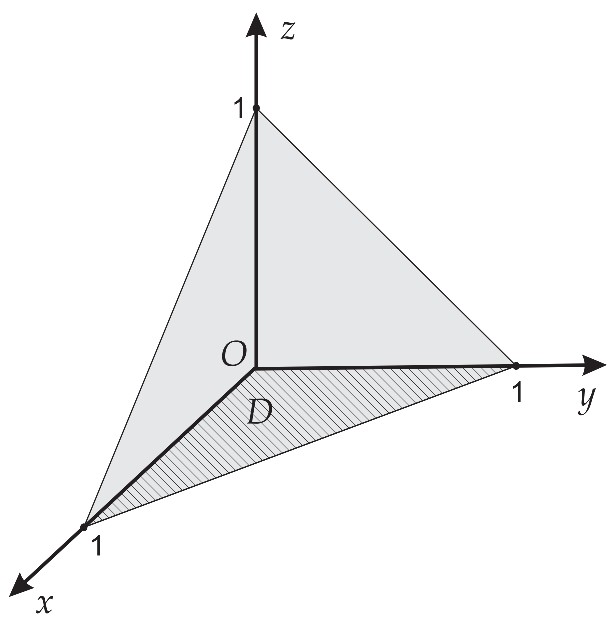


Figura 1: Domeniu simplu în raport cu Oz

Exemplul 1.10 *Să se calculeze integrala triplă* $I = \iiint\limits_V \frac{dxdydz}{(1+x+y+z)^3} dxdydz$, *unde* V *este domeniul limitat de planele* $x+y+z=1$, $x=0$, $y=0$, $z=0$.

Soluţie. Domeniul V are următoarea reprezentare grafică:



Să observăm că acesta este simplu în raport cu axa Oz având reprezentarea

$$V : \begin{cases} 0 \leq z \leq 1-x-y, \\ (x,y) \in D \end{cases}$$

unde domeniul D, situat în planul xOy, este dat prin:

$$D : \begin{cases} 0 \leq x \leq 1 \\ 0 \leq y \leq 1 - x. \end{cases}$$

Avem atunci

$$I = \iiint\limits_V \frac{dxdydz}{(1+x+y+z)^3} dxdydz = \iint\limits_D \left[\int_0^{1-x-y} \frac{dz}{(1+x+y+z)^3} \right] dxdy.$$

Calculăm integrala interioară

$$\begin{aligned} J(x,y) = \int_0^{1-x-y} \frac{dz}{(1+x+y+z)^3} &= -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{(1+x+y+z)^2} \Bigg|_0^{1-x-y} \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{(1+x+y)^2} - \frac{1}{4} \right]. \end{aligned}$$

Astfel,

$$I = \frac{1}{2} \iint\limits_D \left[\frac{1}{(1+x+y)^2} - \frac{1}{4} \right] dxdy.$$

Dar domeniul D este simplu în raport cu axa Oy, deci putem scrie

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{2} \int_0^1 dx \int_0^{1-x} \left[\frac{1}{(1+x+y)^2} - \frac{1}{4} \right] dy = \frac{1}{2} \int_0^1 \left(-\frac{1}{1+x+y} - \frac{y}{4} \right) \Bigg|_0^{1-x} dx \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{1+x} - \frac{1-x}{4} \right) dx = \frac{1}{2} \left(-\frac{3x}{4} + \frac{x^2}{8} + \ln(1+x) \right) \Bigg|_0^1 \\ &= \frac{1}{2} \left(\ln 2 - \frac{5}{8} \right). \end{aligned}$$

□

Exemplul 1.11 *Să se determine volumul regiunii mărginite de suprafeţele parabolice $z = x^2 + y^2$ şi $z = 2 - x^2 - y^2$.*

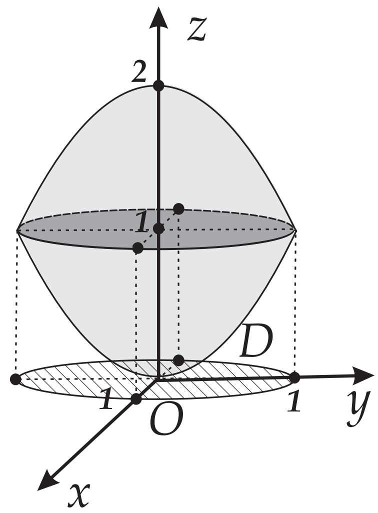
Soluţie.

Intersecţia celor două suprafeţe este discul de rază 1, definit de $x^2 + y^2 = 1$ şi situat în planul (la cota) $z = 1$. Proiecţia domeniului V pe planul xOy este discul de rază 1, cu centrul în origine (în panul xOy), definit prin $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$. Avem, atunci:

$$I = \iiint\limits_V dxdydz = \iint\limits_D \left(\int_{z=2-x^2-y^2}^{x^2+y^2} dz \right) dxdy = 2 \iint\limits_D \left(x^2 + y^2 + 1 \right) dxdy.$$

Deoarece $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$ este un domeniu circular, vom efectuăm schimbarea de variabile la coordonate polare

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}, r \in [0,1], \quad \theta \in [0, 2\pi].$$



Jacobianul transformării este

$$J = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial r} & \dfrac{\partial x}{\partial \theta} \\ \dfrac{\partial y}{\partial r} & \dfrac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = r.$$

Atunci,

$$I = 2\int_0^1 \int_0^{2\pi} r(r^2+1)drd\theta = \left(2\int_0^1 r(r^2+1)dr\right) \cdot \int_0^{2\pi} d\theta = \frac{10\pi}{3}.$$

1.2 Proprietăţi ale integralei triple

Teorema 1.12 (Proprietatea de liniaritate în raport cu integrandul) *Fie V un domeniu compact din $\mathbb{R}^3$, f, g două funcţii integrabile pe V şi α un număr nenul. Atunci funcţiile $f+g$, $\alpha \cdot f$ sunt integrabile pe V şi, în plus:*

$$\iiint\limits_V (f+g)(x,y,z)dxdydz = \iiint\limits_V f(x,y,z)\,dxdydz + \iiint\limits_V g(x,y,z)\,dxdydz,$$

$$\iiint\limits_V (\alpha \cdot f)(x,y,z)dxdydz = \alpha \cdot \iiint\limits_V f(x,y,z)\,dxdydz.$$

Teorema 1.13 (Proprietatea de aditivitate în raport cu domeniul) *Dacă $V = V_1 \cup V_2$ unde domeniile V_1 şi V_2 satisfac $Int(V_1) \cap Int(V_2) = \emptyset$ şi sunt separate printr-o suprafaţă de volum nul, iar f este integrabilă pe V, atunci f este integrabilă pe V_i, $i = 1, 2$ şi rezultă*

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz = \iiint\limits_{V_1} f(x,y,z)dxdydz + \iiint\limits_{V_2} f(x,y,z)dxdydz.$$

Reciproc, dacă f este integrabilă pe V_i, $i = 1, 2$, atunci f este integrabilă pe V şi are loc aceeaşi relaţie.

Teorema 1.14 *Dacă $f : V \to \mathbb{R}$ este integrabilă pe V şi*

$$f(x,y,z) \geq 0,\ \forall\,(x,y,z) \in V,$$

atunci

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz \geq 0.$$

Teorema 1.15 (monotonie) *Dacă $f, g : V \to \mathbb{R}$ sunt integrabile pe V şi*

$$f(x,y,z) \leq g(x,y,z),\ \forall\,(x,y,z) \in V,$$

atunci

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz \leq \iiint\limits_V g(x,y,z)dxdydz.$$

Dacă pentru orice $(x,y,z) \in V$ are loc

$$m \leq f(x,y,z) \leq M$$

atunci este adevărată şi inegalitatea

$$m \cdot \mathrm{Vol}(V) \leq \iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz \leq M \cdot \mathrm{Vol}(V).$$

Teorema 1.16 *Fie V un domeniu compact din $\mathbb{R}^3$, iar f o funcţie integrabilă pe V. Atunci funcţia $|f|$ este integrabilă pe V şi are loc:*

$$\left|\iiint\limits_V f\,(x,y,z)\,dxdydz\right| \leq \iiint\limits_V |f\,(x,y,z)|\,dxdydz.$$

Teorema 1.17 (de medie pentru integrala triplă) *Fie V un domeniu compact din $\mathbb{R}^3$ şi fie $f : V \to \mathbb{R}$ o funcţie continuă pe V. Atunci există un punct $(x_0, y_0, z_0) \in V$ astfel încât*

$$\iiint\limits_V f\,(x,y,z)\,dxdydz = f\,(x_0,y_0,z_0) \cdot \mathrm{Vol}(V).$$

1.3 Interpretarea mecanică a integralei triple

Considerăm un corp de volum V, care are în fiecare punct densitatea de masă dată printr-o funcţie continuă şi pozitivă $\rho\,(x,y,z)$.

1. **masa** corpului este:

$$M = \iiint\limits_V \rho\,(x,y,z)\ dxdydz.$$

2. **coordonatele centrului de greutate** sunt date de formulele:

$$\begin{cases} x_G = \dfrac{1}{M}\displaystyle\iiint\limits_V x\cdot\rho\left(x,y,z\right)\,dxdydz, \\ y_G = \dfrac{1}{M}\displaystyle\iiint\limits_V y\cdot\rho\left(x,y,z\right)\,dxdydz, \\ z_G = \dfrac{1}{M}\displaystyle\iiint\limits_V z\cdot\rho\left(x,y,z\right)\,dxdydz. \end{cases}$$

3. **momentul de inerţie** al unui corp de volum V, în raport cu un plan π, o dreaptă d sau cu un punct P este:

$$I = \iiint\limits_V r^2\left(x,y,z\right)\cdot\rho\left(x,y,z\right)dxdydz$$

unde $r = r\left(x,y,z\right)$ este distanţa de la un punct curent al plăcii, $\left(x,y,z\right)$, respectiv la planul π, dreapta d şi punctul P.

În particular, momentele de inerţie I_{xOy}, I_{xOz} şi I_{yOz} ale corpului V în raport cu planele de coordonate sunt:

$$I_{xOy} = \iiint\limits_V z^2\cdot\rho\left(x,y,z\right)dxdydz,\quad I_{xOz} = \iiint\limits_V y^2\cdot\rho\left(x,y,z\right)dxdydz,$$

$$I_{yOz} = \iiint\limits_V x^2\cdot\rho\left(x,y,z\right)dxdydz.$$

De asemenea, momentele I_{Ox}, I_{Oy} şi I_{Oz} ale corpului V în raport cu axele de coordonate Ox, Oy, respectiv Oz, sunt:

$$I_{Ox} = \iiint\limits_V (y^2+z^2)\cdot\rho\left(x,y,z\right)dxdydz,\quad I_{Oy} = \iiint\limits_V (x^2+z^2)\cdot\rho\left(x,y,z\right)dxdydz,$$

$$I_{Oz} = \iiint\limits_V (x^2+y^2)\cdot\rho\left(x,y,z\right)dxdydz,$$

iar momentul de inerţie al corpului V în raport cu originea axelor de coordonate este:

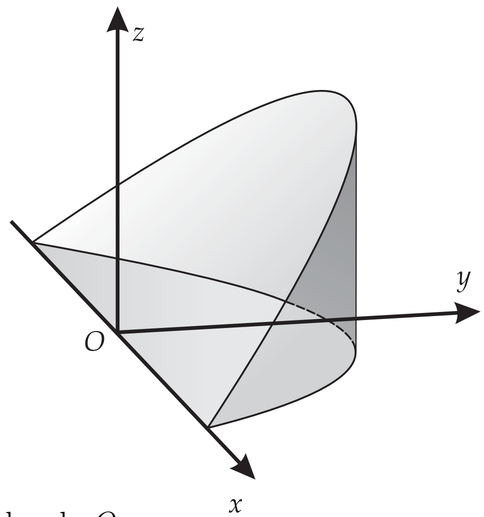
$$I_O = \iint\limits_D \left(x^2+y^2+z^2\right)\cdot\rho\left(x,y,z\right)dxdydz.$$

Exemplul 1.18 *Să se determine masa regiunii V din cilindrul solid $x^2+y^2\le 4$ situată deasupra planului xOy şi sub planul $y = z$ ştiind că densitatea în fiecare punct al lui V este egală cu $\rho(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2}$.*

Soluţie. Domeniul V are următoarea reprezentare grafică:

Observăm că proiecţia regiunii V pe planul xOy este un semidisc de rază 2. Avem:

$$I = \iiint\limits_V \sqrt{x^2+y^2}dxdydz = \iint\limits_D \left(\int_0^y \sqrt{x^2+y^2}dz\right)dxdy$$



unde D este semidiscul din planul xOy:

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}, r \in [0,2], \quad \theta \in [0,\pi].$$

Astfel, $I = \iint\limits_D y\sqrt{x^2+y^2}dxdy$ şi făcând schimarea de varibilă de mai sus, avem:

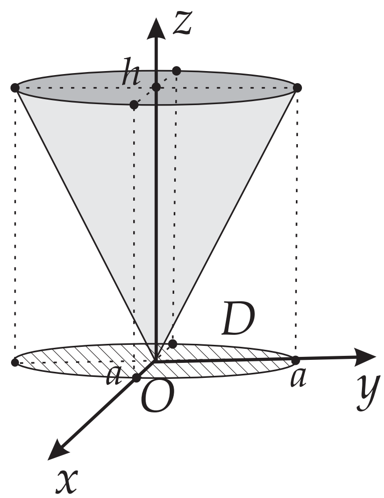
$$I = \int_0^2\int_0^\pi r^3 \sin\theta dr d\theta = \left(\int_0^2 r^3 dr\right)\cdot\left(\int_0^\pi \sin\theta d\theta\right) = 8.$$

1.4 Exerciţii

Exerciţiul 1.19 *Calculaţi următoarele integrale triple pe domeniile indicate:*

1. $I = \iiint\limits_V z\,dxdydz$, unde V este domeniul limitat de suprafeţele $z^2 = \dfrac{h^2}{a^2}(x^2+y^2)$, $z = 0$, $z = h$.

Soluţie. Reprezentarea geometrică a domeniului este următoarea:



Domeniul V este simplu în raport cu axa Oz, putând fi scris sub forma:

$$V : \begin{cases} \dfrac{h}{a}\sqrt{x^2+y^2} \leq z \leq h, \\ (x,y) \in D, \end{cases}$$

unde domeniul D, situat în planul xOy, este caracterizat prin

$$D : x^2 + y^2 \leq a^2.$$

Avem

$$I = \iiint\limits_V z\, dxdydz = \iint\limits_D dxdy \int_{\frac{h}{a}\sqrt{x^2+y^2}}^{h} z\, dz.$$

Calculăm integrala

$$J(x,y) = \int_{\frac{h}{a}\sqrt{x^2+y^2}}^{h} z\, dz = \frac{z^2}{2}\Bigg|_{\frac{h}{a}\sqrt{x^2+y^2}}^{h} = \frac{h^2}{2} - \frac{h^2}{2a^2}(x^2+y^2).$$

Astfel,

$$I = \iint\limits_D \frac{h^2}{2a^2}(a^2 - x^2 - y^2)\, dxdy = \frac{h^2}{2a^2} \iint\limits_D (a^2 - x^2 - y^2)\, dxdy.$$

Întrucât D este un disc în planul xOy, cu centrul în origine şi de rază $r = a$, facem schimbarea de variabile

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}, \; (r,\theta) \in [0,a] \times [0, 2\pi].$$

Rezultă:

$$I = \frac{h^2}{2a^2} \iint\limits_{[0,2\pi]\times[0,a]} (a^2 - r^2) r\, drd\theta = \frac{h^2}{2a^2} \int_0^{2\pi} d\theta \cdot \int_0^a (a^2 r - r^3)\, dr$$

$$= \frac{h^2\pi}{a^2} \cdot \left(\frac{a^2 r^2}{2} - \frac{r^4}{4} \right)\Bigg|_0^a = \frac{\pi h^2 a^2}{4}.$$

2. $I = \iiint\limits_V (x^2+y^2)z\,dxdydz$, unde V este domeniul limitat de paraboloidul de ecuaţie $z = x^2+y^2$ şi de sfera de ecuaţii $x^2+y^2+z^2 = 6$.

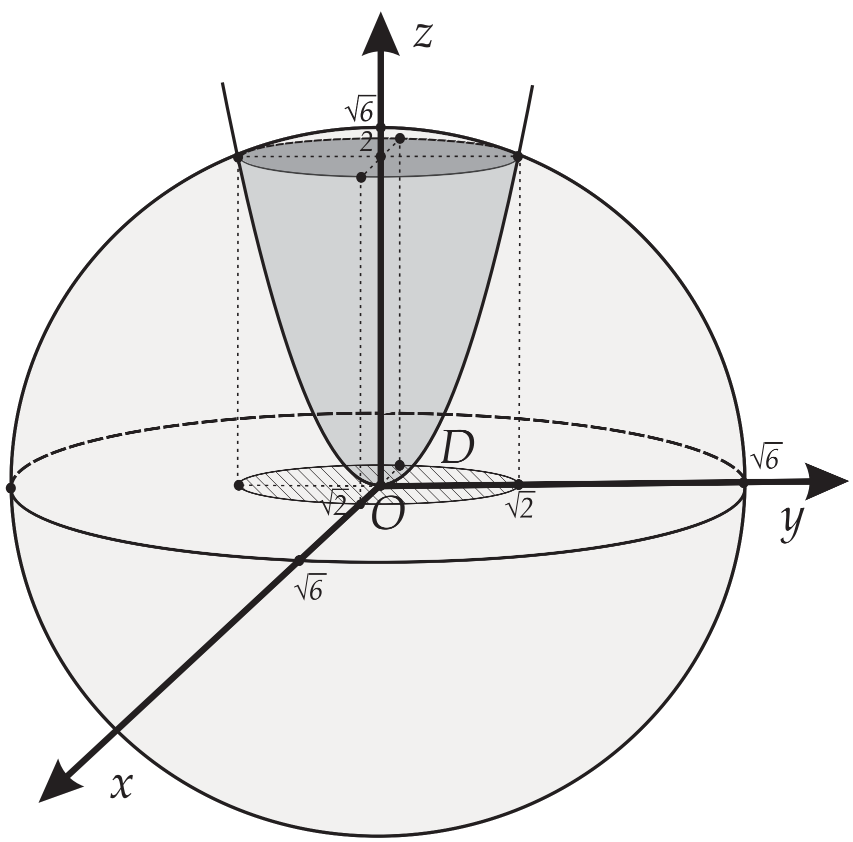
Soluţie. Observăm că V este simplu în raport cu axa Oz şi poate fi caracterizat prin:

$$V : \begin{cases} x^2+y^2 \leq z \leq \sqrt{6-x^2-y^2}, \\ (x,y) \in D \end{cases}$$

unde D este proiecţia lui V pe planul xOy.

Cum intersecţia dintre paraboloid şi sferă este cercul de ecuaţii $\begin{cases} x^2+y^2 = 2, \\ z = 2 \end{cases}$, deducem că domeniul plan D este dat de

$$D: \ x^2+y^2 \leq 2.$$



Obţinem astfel:

$$I = \iiint\limits_V (x^2+y^2)z\,dxdydz = \iint\limits_D dxdy \int_{x^2+y^2}^{\sqrt{6-x^2-y^2}} (x^2+y^2)z\,dz.$$

Calculăm integrala

$$J(x,y)=\int_{x^2+y^2}^{\sqrt{6-x^2-y^2}}(x^2+y^2)z\,dz=\frac{1}{2}(x^2+y^2)\cdot\left[6-x^2-y^2-(x^2+y^2)^2\right].$$

Astfel,

$$I=\frac{1}{2}\iint_D(x^2+y^2)\cdot\left[6-x^2-y^2-(x^2+y^2)^2\right]\,dxdy.$$

Întrucât D este un disc în planul xOy, cu centrul în origine şi de rază $r=\sqrt{2}$, facem schimbarea de variabile

$$\begin{cases} x=r\cos\theta \\ y=r\sin\theta \end{cases},\ (r,\theta)\in\left[0,\sqrt{2}\right]\times[0,2\pi].$$

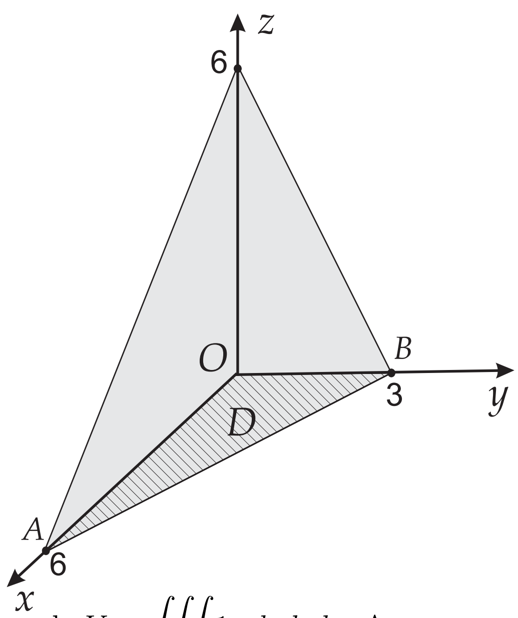
Rezultă

$$I=\frac{1}{2}\iint_{\left[0,\sqrt{2}\right]\times[0,2\pi]}r^2(6-r^2-r^4)r\,drd\theta=\pi\int_0^{\sqrt{2}}(6r^3-r^5-r^7)\,dr$$

$$=\pi\left(\frac{6r^4}{4}-\frac{r^6}{6}-\frac{r^8}{8}\right)\Bigg|_0^{\sqrt{2}}=\frac{8\pi}{3}.$$

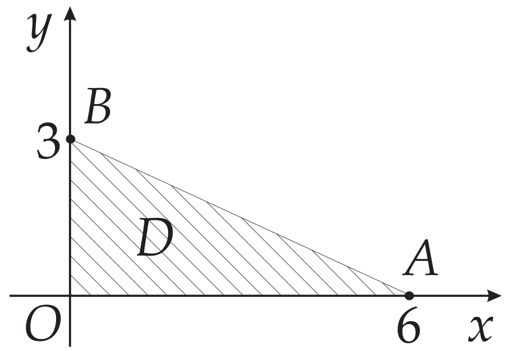
3. Aflaţi volumul tetraedrului mărginit de planele de coordonate şi de planul $x+2y+z=6$. Aflaţi apoi masa M a tetraedrului ştiind că are densitatea $\rho(x,y,z)=6-x$.

Soluţie.



Volumul îl determinăm cu formula $V=\iiint_V 1\cdot dxdydz$. Avem:

$$V=\iint_D\left(\int_0^{6-x-2y}dz\right)dxdy,$$



unde D este proiecţia tetraedrului pe planul xOy. Este clar că D este triunghiul AOB, dreptunghic în O, unde $A(6,0,0)$ iar $B(0,3,0)$ împreună cu interiorul acestui triunghi.
Având în vedere că dreapta AB are ecuaţia $x+2y=6$ obţinem:

$$\begin{aligned} V &= \int_0^6 \left(\int_0^{\frac{6-x}{2}} \left(\int_0^{6-x-2y} dz \right) dy \right) dx = \int_0^6 \left(\int_0^{\frac{6-x}{2}} (6-x-2y)\, dy \right) dx \\ &= \int_0^6 \left(6y - xy - y^2\right) \Big|_0^{\frac{6-x}{2}} dx = \frac{1}{4} \int_0^6 (x-6)^2\, dx = \frac{(x-6)^3}{12} \Big|_0^6 = 18. \end{aligned}$$

Folosind cele de mai sus şi formula masei, avem:

$$\begin{aligned} M &= \iiint_V \rho(x,y,z) dx dy dz = \int_0^6 \left(\int_0^{\frac{6-x}{2}} \left(\int_0^{6-x-2y} (6-x) dz \right) dy \right) dx \\ &= \int_0^6 \left((6-x) \cdot \int_0^{\frac{6-x}{2}} \left(\int_0^{6-x-2y} dz \right) dy \right) dx \\ &= \frac{1}{4} \int_0^6 (6-x)^3\, dx = -\frac{(6-x)^4}{16} \Big|_0^6 = 81. \end{aligned}$$

1.5 Schimbarea de variabilă în integrale triple

Considerăm două domenii compacte V şi V' din $\mathbb{R}^3$ şi o transformare $T : V' \to V$, de forma

$$\begin{cases} x = x(u,v,w) \\ y = y(u,v,w) \qquad (u,v,w) \in V', \\ z = z(u,v,w), \end{cases} \tag{16}$$

unde:

1. x, y, z sunt de clasă $C^1(V')$;
2. T este surjectivă;
3. Jacobianul $J\,(u,v,w) = \dfrac{D(x,y,z)}{D(u,v,w)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} & \dfrac{\partial x}{\partial w} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} & \dfrac{\partial y}{\partial w} \\ \dfrac{\partial z}{\partial u} & \dfrac{\partial z}{\partial v} & \dfrac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix} \neq 0$ pe V'.

O funcţie cu aceste proprietăţi va fi numită **schimbare de variabile** sau de **coordonate**.

Teorema 1.20 *Dacă f este integrabilă pe V, atunci are loc*

$$\iiint_V f(x,y,z)dxdydz = \iiint_V f(x(u,v,w), y(u,v,w), z(u,v,w)) \cdot |J(u,v,w)|\, dudvdw. \tag{17}$$

Observaţia 1.21 *Scopul schimbării de variabile în integrala triplă este înlocuirea domeniului de integrare printr-un alt domeniu, ceea ce conduce la un calculul mai uşor al integralei.*

1.5.1 Schimbări de variabilă frecvent utilizate

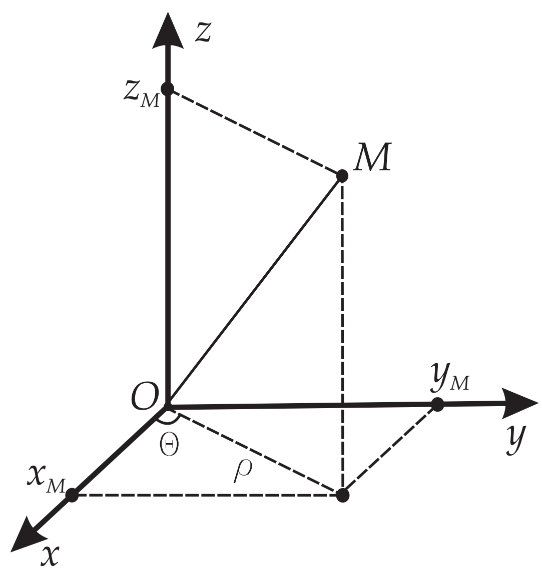
1. Coordonate cilindrice

Una dintre schimbările importante de variabile în integrala triplă o reprezintă trecerea de la coordonate carteziene (x, y, z)la **coordonate cilindrice** (r, θ, z). Această transformare de coordonate este dată de:

$$\begin{cases} x = r \cdot \cos\theta \\ y = r \cdot \sin\theta \\ z = z, \end{cases}$$

unde r reprezintă proiecţia razei vectoare pe planul xOy, θ este unghiul orientat între semiaxa pozitivă Ox şi proiecţia razei vectoare pe planul xOy iar z este cota carteziană. Dacă $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ atunci coordonatele cilindrice $(r, \theta, z) \in \mathbb{R}^3$ satisfac maximal

$$r \geq 0,\ 0 \leq \theta \leq 2\pi,\ z \in \mathbb{R}.$$



Jacobianul transformării este:

$$J(r,\theta,z) = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial r} & \dfrac{\partial x}{\partial \theta} & \dfrac{\partial x}{\partial z} \\ \dfrac{\partial y}{\partial r} & \dfrac{\partial y}{\partial \theta} & \dfrac{\partial y}{\partial z} \\ \dfrac{\partial z}{\partial r} & \dfrac{\partial z}{\partial \theta} & \dfrac{\partial z}{\partial z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & r\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$
$$= r \cdot \left(\cos^2\theta + \sin^2\theta\right) = r.$$

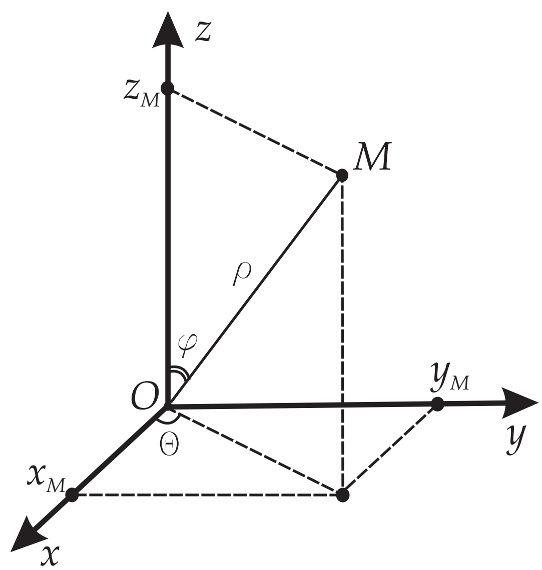
2. Coordonate sferice

Dacă domeniul V este o sferă, un sector sferic sau o coroană sferică, atunci trecem de la coordonate carteziene (x, y, z) la **coordonate sferice** (r, θ, φ). Această transformare de coordonate este dată de:

$$\begin{cases} x = r \cdot \cos\theta \cdot \sin\varphi \\ y = r \cdot \sin\theta \cdot \sin\varphi \\ z = r \cdot \cos\varphi, \end{cases} \tag{18}$$

unde r reprezintă lungimea vectorului de poziţie sau raza vectoare, θ este unghiul orientat între semiaxa pozitivă Ox şi proiecţia razei vectoare pe planul xOy, iar φ este unghiul (neorientat) format de raza vectoare cu axa Oz. Dacă $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ atunci coordonatele sferice $(r, \theta, \varphi) \in \mathbb{R}^3$ satisfac

$$r \geq 0,\ 0 \leq \theta \leq 2\pi,\ 0 \leq \varphi \leq \pi\}.$$



Jacobianul transformării este:

$$J(r, \theta, \varphi) = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial r} & \dfrac{\partial x}{\partial \theta} & \dfrac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \dfrac{\partial y}{\partial r} & \dfrac{\partial y}{\partial \theta} & \dfrac{\partial y}{\partial \varphi} \\ \dfrac{\partial z}{\partial r} & \dfrac{\partial z}{\partial \theta} & \dfrac{\partial z}{\partial \varphi} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta\ \sin\varphi & -r\ \sin\theta\ \sin\varphi & r\ \cos\theta\ \cos\varphi \\ \sin\theta\ \sin\varphi & r\ \cos\theta\ \sin\varphi & r\ \sin\theta\ \cos\varphi \\ \cos\varphi & 0 & -r\sin\varphi \end{vmatrix}$$

$$= r^2(\sin\varphi) \begin{vmatrix} \cos\theta\ \sin\varphi & -\sin\theta & \cos\theta\ \cos\varphi \\ \sin\theta\ \sin\varphi & \cos\theta & \sin\theta\ \cos\varphi \\ \cos\varphi & 0 & -\sin\varphi \end{vmatrix}$$

$$= r^2(\sin\varphi)\left(-\cos^2\theta\sin^2\varphi - \sin^2\theta\cos^2\varphi - \cos^2\theta\cos^2\varphi - \sin^2\theta\sin^2\varphi\right)$$

$$= -r^2(\sin\varphi)\left[\cos^2\varphi(\cos^2\theta + \sin^2\theta) + \sin^2\varphi(\sin^2\theta + \cos^2\theta)\right] = -r^2\sin\varphi$$

Deoarece, în general $\varphi \in [0, \pi]$, rezultă că

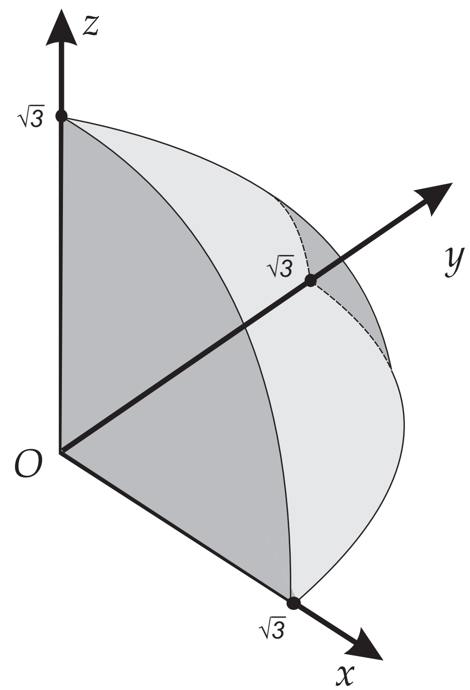
$$|J(r, \theta, \varphi)| = r^2\sin\varphi \quad \text{şi} \quad dxdydz = r^2\sin\varphi\, drd\theta d\varphi$$

1.5.2 Exemple

1. Calculaţi $\iiint\limits_V \frac{x}{x^2+y^2} dxdydz$, unde V este regiunea din primul octant mărginită de sfera de rază $\sqrt{3}$

$$V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ \mid \ x^2+y^2+z^2 \leq 3,\ x \geq 0,\ y \geq 0,\ z \geq 0\}.$$

Soluţie.



Vom trece la coordonate sferice:

$$\begin{cases} x = r \cdot \cos\theta \cdot \sin\varphi \\ y = r \cdot \sin\theta \cdot \sin\varphi \\ z = r \cdot \cos\varphi \end{cases}, \ r \in [0, \sqrt{3}], \theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \varphi \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right].$$

Avem:

$$dxdydz = r^2 \sin\varphi \, drd\theta d\varphi$$

şi astfel

$$\iiint\limits_V \frac{x}{x^2+y^2}dxdydz = \int_0^{\sqrt{3}}\left\{\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{r\cdot\cos\theta\cdot\sin\varphi}{r^2\sin^2\varphi}\cdot r^2\sin\varphi\, d\varphi\right]d\theta\right\}dr =$$

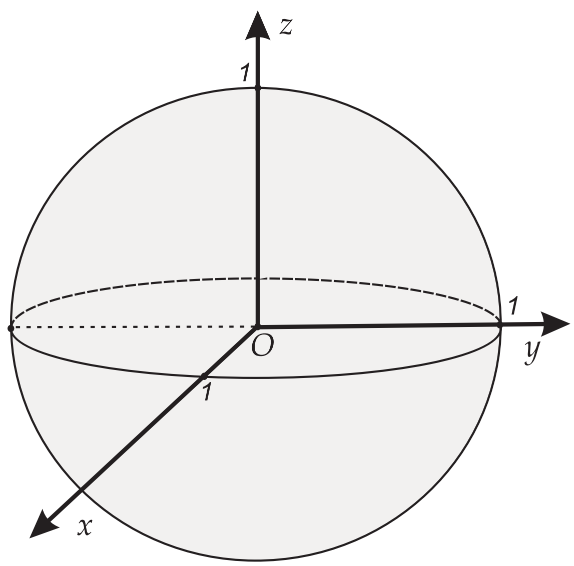
$$= \int_0^{\sqrt{3}}\left\{\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} r\cos\theta\right]d\theta\right\}dr =$$

$$= \left(\int_0^3 r\,dr\right)\cdot\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta\,d\theta\right)\cdot\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\right) =$$

$$= \frac{3\pi}{4}.$$

2. Calculaţi integrala $I = \iiint\limits_V x^2\,dxdydz$, unde V este sfera unitate: $V = \left\{(x,y,z) \mid x^2+y^2+z^2 \le 1\right\}$.

Soluţie.



Deoarece domeniul pe care se integrează este sfera unitate, vom trece la coordonate sferice:

$$\begin{cases} x = r\cdot\cos\theta\cdot\sin\varphi \\ y = r\cdot\sin\theta\cdot\sin\varphi \qquad r\in[0,1], \theta\in[0,2\pi], \varphi\in[0,\pi]. \\ z = r\cdot\cos\varphi, \end{cases}$$

Avem:

$$dxdydz = r^2\sin\varphi\, drd\theta d\varphi$$

şi atunci integrala devine:

$$I = \int_0^1\left\{\int_0^{2\pi}\left[\int_0^{\pi} r^4\sin^3\varphi\cos^2\theta\, d\varphi\right]d\theta\right\}dr = \left(\int_0^1 r^4\,dr\right)\cdot\left(\int_0^{2\pi}\cos^2\theta\,d\theta\right)\cdot\left(\int_0^{\pi}\sin^3\varphi\,d\varphi\right).$$

Notăm cele trei integrale cu I_1, I_2 respectiv I_3. Evident, $I_1 = \dfrac{1}{5}$.

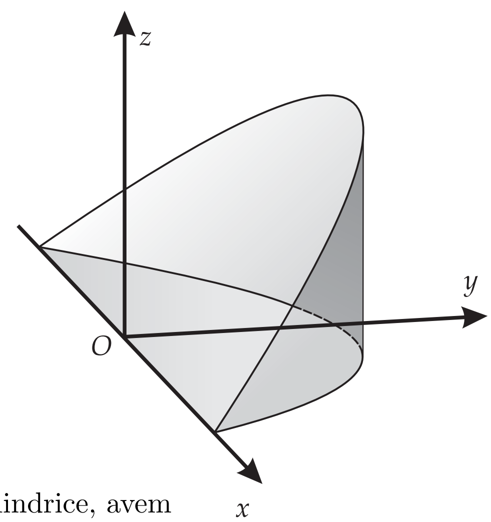
$$I_2 = \int_0^{2\pi} \frac{1+\cos 2\theta}{2}\, d\theta = \left(\frac{1}{2}\theta + \frac{1}{4}\sin 2\theta\right)\Big|_0^{2\pi} = \pi.$$

$$I_3 = \int_0^{\pi} \sin^3\varphi\, d\varphi = \int_0^{\pi} \left(1-\cos^2\varphi\right)\cdot \sin\varphi\, d\varphi = -\cos\varphi\Big|_0^{\pi} + \frac{1}{3}\cos^3\varphi\Big|_0^{\pi} = \frac{4}{3}.$$

În concluzie $I = \dfrac{4\pi}{15}$.

3. Folosind coordonatele cilindrice, să se calculeze $\iiint\limits_V \sqrt{x^2+y^2}dxdydz$, unde V este regiunea din cilindrul $x^2+y^2 \leq 4$ situată între planul xOy şi planul $y = z$.

Soluţie. Domeniul V are următoarea reprezentare grafică (aceeaşi problemă a fost rezolvată anterior, prin altă metodă):



Folosind coordonatele cilindrice, avem

$$\begin{cases} x = r\cdot\cos\theta \\ y = r\cdot\sin\theta \\ z = z \end{cases}, r\in[0,2],\ \theta\in[0,\pi],\ z\in[0, r\sin\theta],$$

deoarece ecuaţia cilindrului $x^2+y^2 = 4$ este $r = 2$, iar a planului $z = y$ este $z = r\cdot\sin\theta$. Obţinem

$$I = \iiint\limits_V \sqrt{x^2+y^2}dxdydz = \iint\limits_{[0,2]\times[0,\pi]} \left(\int_0^{r\sin\theta} r\cdot r\ dz\right) drd\theta$$

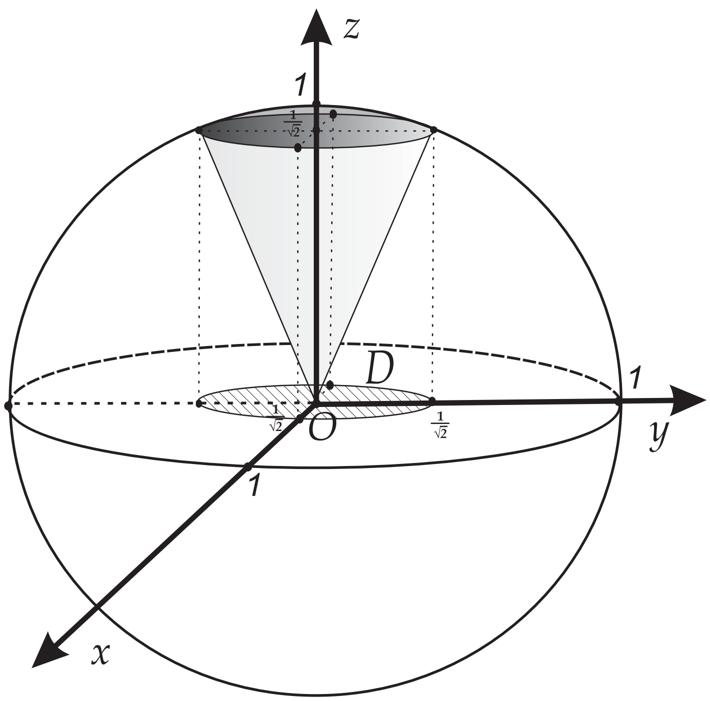
$$= \iint\limits_{[0,2]\times[0,\pi]} \left(r^2\cdot y\Big|_0^{r\sin\theta}\right) drd\theta = \iint\limits_{[0,2]\times[0,\pi]} r^3\cdot\sin\theta drd\theta$$

$$= \left(\int_0^2 r^3dr\right)\cdot\left(\int_0^{\pi}\sin\theta d\theta\right) = 8.$$

4. Să se determine masa porţiunii din conul solid $x^2 + y^2 \leq z^2$ mărginită de sfera unitate, situată în semispaţiul $z \geq 0$ ştiind că are densitatea $\rho(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

Soluţie. Corpul are forma unui "cornet de îngheţată", a cărui proiecţie pe planul xOy este dată de discul de intersecţie dintre suprafaţa conică şi sfera unitate. Intersecţia se află rezolvând sistemul de ecuaţii

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1 \\ x^2 + y^2 = z^2 \\ z \geq 0. \end{cases}$$



Se obţine imediat că intersecţia este discul de rază $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ situat la cota $z = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$, în plan paralel cu xOy. Trecem la coordonate sferice

$$\begin{cases} x = r \cdot \cos\theta \cdot \sin\varphi \\ y = r \cdot \sin\theta \cdot \sin\varphi \\ z = r \cdot \cos\varphi. \end{cases}$$

şi

$$dxdydz = r^2 \sin\varphi \, drd\theta d\varphi$$

Deducem domeniul în care variază (r, θ, φ).

Din $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$ găsim $r^2 \leq 1$ şi cum $r \geq 0$, rezultă $r \in [0, 1]$.

Din $x^2 + y^2 \geq z^2$ deducem $r^2 \sin^2\varphi \leq r^2 \cos^2\varphi$ şi cum $z \geq 0$ implică $\cos\varphi \geq 0$, rezultă deci $\sin\varphi \leq \cos\varphi$, adică $\varphi \in \left[0, \dfrac{\pi}{4}\right]$. Se observă de altfel, că generatoarea conului face un unghi de măsură $\dfrac{\pi}{4}$ cu axa Oz:

Intervalul în care variază θ acoperă lungimea 2π, $\theta \in [0, 2\pi]$.

Avem:

$$
\begin{aligned}
M &= \iiint\limits_V \sqrt{x^2+y^2+z^2}dxdydz = \int_0^1 \left\{ \int_0^{2\pi} \left[\int_0^{\frac{\pi}{4}} r^3 \sin\varphi \, d\varphi \right] d\theta \right\} dr \\
&= \left(\int_0^1 r^3 \, dr \right) \cdot \left(\int_0^{2\pi} d\theta \right) \cdot \left(\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin\varphi \, d\varphi \right) \\
&= \frac{1}{4} \cdot 2\pi \cdot (-\cos\varphi) \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{2} \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \right).
\end{aligned}
$$